Задача двох тіл

Пономаренко С.М.

ЗМІСТ

§ 1. Теоретична частина

1.1. Рівняння руху

Розглянемо замкнуту систему двох матеріальних точок, які взаємодіють між собою. Центр мас цієї системи рухається рівномірно і прямолінійно.

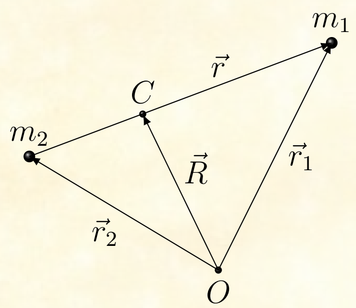


Рис. 1. На рисунку точки C та O рознесені для наглядності

Задача двох тіл просто розв'язується в системі з початком в центрі мас, тобто $\vec{R} = 0$, який рухається поступально [1, стор. 44].

Позначимо маси частинок через m_1 та m_2, їх радіус-вектори, проведені від центру мас, відповідно r_1 та r_2 (рис. 1). Нехай r – вектор, проведений від тіла m_2 до m_1. З означення радіус-вектора центру мас маємо:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \tag{1}$$

З рисунка випливає співвідношення між радіус-векторами:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{2}$$

Дві останні рівності дозволяють виразити радіус-вектори $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$, що з'єднує тіла m_1 до m_2. Маємо:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{3}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

В класичній механіці рівняння руху тіл масами m_1 та m_2 є законами Ньютона:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r},$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}.$$

При переході до системи центра мас ці рівняння зводяться до

$$M\ddot{\vec{R}} = 0, \tag{6}$$
$$\mu\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}, \tag{7}$$

де $M = m_1 + m_2$ – сумарна маса двох тіл, μ — приведена маса:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8}$$

Таким чином задача двох тіл розпадається на задачу про поступальний рух центру мас і задачу про рух матеріальної точки масою μ в центральному потенціалі. Прискорення центра мас дорівнює нулю, тобто він рухається із постійною швидкістю, однак відносний рух матеріальних точок складніший.

З рівняння руху (7) (див. далі) випливає, що приведена маса рухається по одній з кривих другого порядку (еліпсу, гіперболі чи параболі).

Але при використанні результатів розв'язку рівняння (7) необхідно пам'ятати, що приведена маса, яка рухається на кінці радіус-вектора r під дією силового центру, котрий знаходиться в початку координат системи центра мас, лише зображує рух. Після того, коли рівняння руху (7) проінтегроване, слід переходити до реального руху двох тіл масами m_1 та m_2 згідно рівнянь (3) та (4).

Очевидно, що траєкторії руху приведеної маси і тіл будуть подібними кривими відносно центру мас, а відношення подібності є обернене відношення мас, тобто:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Тобто, якщо рух приведеної маси є колом, то і рух тіл також буде коловим (див. 2), і якщо рух приведеної маси буде еліптичним, то і рух тіл також буде еліптичним (див. рис. 3 та 4).

Диференціюючи (3) та (4) за часом, знайдемо швидкості тіл в залежності від швидкості приведеної маси:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \tag{9}$$
$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

Через приведену масу системи виражаються і основні динамічні параметри системи — енергія, імпульс, момент імпульсу.

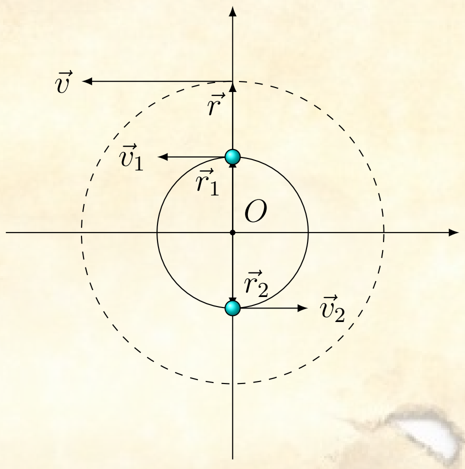


Рис. 2. Рух тіл по еліптичним орбітам. Випадок $m_1 = m_2$

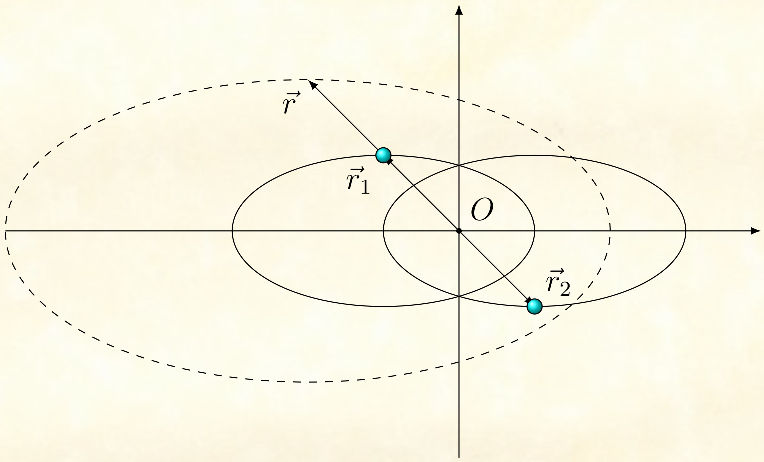


Рис. 3. Рух тіл по еліптичним орбітам. Випадок $m_1 = m_2$

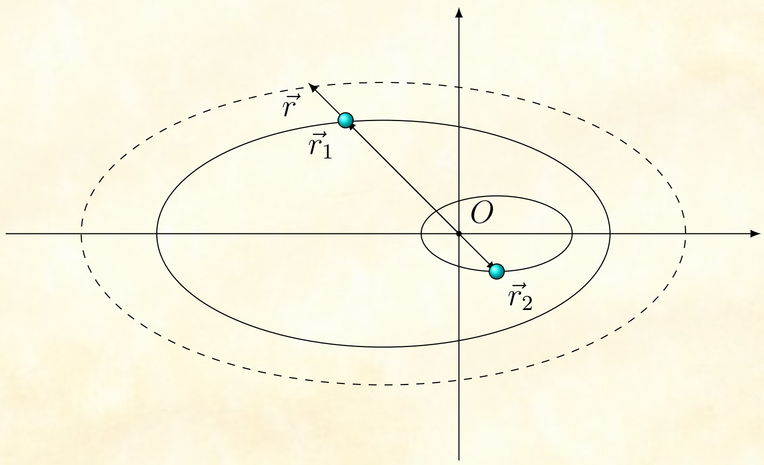


Рис. 4. Рух тіл по еліптичним орбітам. Випадок $m_2 > m_1$

1.2. Закони збереження

Тепер приступимо до інтегрування рівняння руху (7). Дана задача, тобто задача про рух матеріальної точки в центральному потенціалі, спрощується, якщо застосувати закони збереження енергії та моменту імпульсу (див. наприклад [2, стор. 334, §57]):

$$E = \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = \text{const},$$
$$\vec{L} = \mu[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \text{const}.$$

Вектор моменту імпульсу перпендикулярний як до радіус-вектора матеріальної точки, так і до її вектора її швидкості. Тому рух матеріальної точки завжди залишається в площині, перпендикулярній до $\vec{L}$.

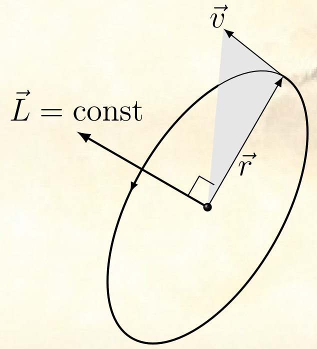


Рис. 5. Графічне пояснення, чому орбіта є плоска крива

Оскільки $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$, а $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$ то

$$\frac{L}{\mu} = [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}],$$
$$\frac{L}{\mu} = [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}],$$
$$\frac{L}{\mu} = [\vec{r} \times \vec{v}_r] + [\vec{r} \times \vec{v}_\varphi],$$
$$\frac{L}{\mu} = \underbrace{[\vec{r} \times \vec{v}_r]}_{=0} + [\vec{r} \times \vec{v}_\varphi],$$
$$\frac{L}{\mu} = [\vec{r} \times \vec{v}_\varphi].$$

Отже, в полярній системі координат (оскільки $\vec{v}_\varphi \perp \vec{r}$) із віссю z вздовж $\vec{L}$ рівняння руху записуються:

$$\frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = E,$$
$$\mu r^2\dot{\varphi} = L.$$

Потенціальна енергія взаємодії тіл:

$$U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r} \tag{12}$$

Зробимо деякі перепозначення:

$$\frac{m_1m_2}{\mu} = m_1 + m_2,$$

$$G(m_1 + m_2) = \alpha,$$

З урахуванням перепозначень запишемо закони збереження:

$$\frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{E}{\mu}, \tag{13}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu}. \tag{14}$$

Виразимо з (5) r^2 та підставимо в (13):

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{E}{\mu} - \left(\frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{\alpha}{r}\right), \tag{15}$$

Величина в дужках у рівнянні (15), називається питомий ефективний потенціал:

$$\frac{U_{eff}}{\mu} = \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{16}$$

1.3. Параметри орбіти

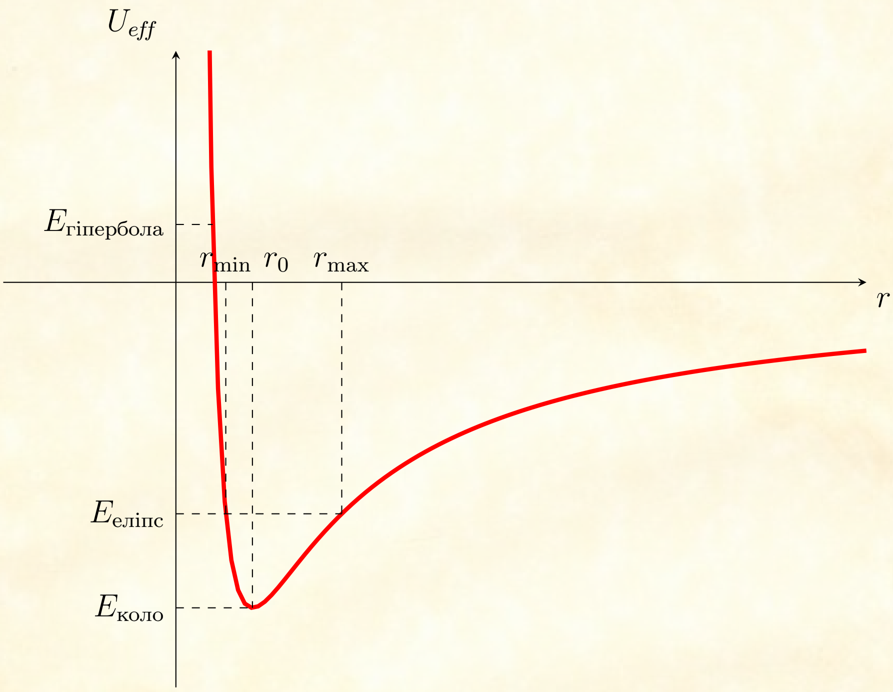


Рис. 6. Ефективний потенціал

Точки повороту можна знайти з умови $E = U_{eff}$, тобто, коли радіальна швидкість дорівнює нулю $\dot{r} = 0$ (див. рис. 6):

$$\frac{E}{\mu} = \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{17}$$

Дане рівняння має два розв'язки:

$$r_{\text{min,max}} = -\frac{\alpha\mu}{2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu^3\alpha^2}}\right) \tag{18}$$

Знак «+» відноситься до $r_{\max}$ – апоцентру, а знак «−» відноситься до $r_{\min}$ – перицентру.

У випадку колового руху, рівняння (17) має один розв'язок, $r_{\min} = r_{\max} = R$, де R – радіус кола, який можна знайти з як

$$R = -\frac{\alpha\mu}{2E}. \tag{19}$$

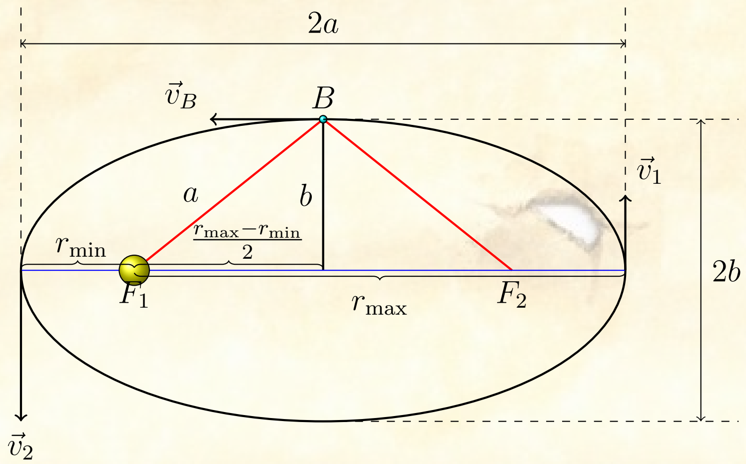


Рис. 7. Зв'язок a та b з $r_{\max}$ та $r_{\min}$

Параметри еліпса:
a – велика піввісь,
b – мала піввісь,
зв'язані з $r_{\max}$ та $r_{\min}$ згідно геометрії (рис. 7) формулами:

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}, \tag{20}$$

$$b = \sqrt{r_{\max} r_{\min}}. \tag{21}$$

1.4. Зв'язок параметрів орбіти з енергією та моментом імпульсу

Додамо $r_{\max}$ та $r_{\min}$ з (18) і врахуємо (20), отримаємо:

$$E = -\frac{\alpha\mu}{2a} \tag{22}$$

Знайдемо зв'язок між L та параметрами еліпса. Для цього застосуємо рівняння (15) для точок повороту, в яких $\dot{r} = 0$:

$$0 = \frac{E}{\mu} - \left(\frac{L^2}{2\mu^2 r_{\max}^2} - \frac{\alpha}{r_{\max}}\right),$$

$$0 = \frac{E}{\mu} - \left(\frac{L^2}{2\mu^2 r_{\min}^2} - \frac{\alpha}{r_{\min}}\right),$$

Віднімемо від першого рівняння друге і виразимо L/μ:

$$\frac{L}{\mu} = \sqrt{2\alpha \frac{r_{\max} r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}} \tag{23}$$

З цього рівняння враховуючи (20) та (21) можна виразити через них (23):

$$\frac{L}{\mu} = b\sqrt{\frac{\alpha}{a}} \tag{24}$$

1.5. Секторіальна швидкість та період обертання

Секторіальна швидкість тіла визначається як площа, яку замітає радіус-вектор $\vec{r}$ планети за одиницю часу. Знайдемо, яку площу dS замітає радіус-вектор за час dt з (рис. 8):

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right| dt$$

Оскільки $\vec{L} = \left[\vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}\right]$, то остання формула приймає вигляд:

$$dS = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}dt$$

Проінтегруємо останню рівність:

$$\int dS = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}\int dt$$

Інтеграл в лівій частині дає площу еліпса, яка дорівнює πab, а інтеграл праворуч дає період обертання тіла.

Отже, період планети визначається як:

$$T = \frac{2\pi ab}{L/\mu} \tag{25}$$

Використавши (24), виразимо період обертання через параметри еліпсу:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\alpha} \tag{26}$$

Останній вираз є третім законом Кеплера.

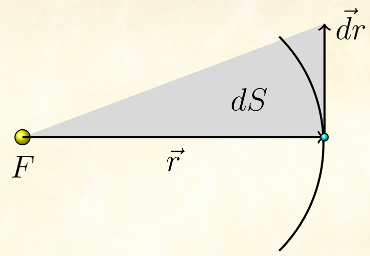


Рис. 8. Визначення секторіальної швидкості

1.6. Траєкторія руху частинки в задачі Кеплера

Якщо одне з тіл системи має масу, яка набагато більша за масу іншого тіла, то задача двох тіл з потенціалом $\sim \frac{1}{r}$ називається задачею Кеплера. Нехай $m_2 \gg m_1$, тоді (перепозначимо $m_1 = m$):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m, \tag{27}$$

а, ефективний потенціал з (16) приймає вигляд:

$$\frac{U_{\mathit{eff}}}{m} = \frac{L^2}{2m^2r^2} + \frac{U(r)}{m} \tag{28}$$

Отже, задача Кеплера – це задача на визначення траєкторії руху частинки, масою m в ефективному потенціалі вигляду (28)

Траєкторією руху тіла є залежність (в полярних координатах) радіальної координати r від полярної φ, тобто функція $r = r(\varphi)$. Для того, щоб знайти цю функцію, зручно розглянути закони збереження. Перепишемо їх ще раз:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{E}{m} - \left(\frac{L^2}{2m^2r^2} + V(r)\right), \tag{29}$$

$$\frac{L}{m} = r^2\dot{\varphi} \tag{30}$$

де $V(r) = \frac{U(r)}{m}$ – звичайний потенціал (неефективний), який за означення дорівнює потенціальній енергії одиничної маси.

З першого рівняння можна виразити $\dot{r}$:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}} \tag{31}$$

З другого (30):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \tag{32}$$

Для отримання рівняння траєкторії ($r = r(\varphi)$), треба виключити dt, тобто:

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}, \tag{33}$$

або

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + \mathrm{const}, \tag{34}$$

Далі, все залежить від того, який має вигляд вираз для потенціальної енергії. Якщо $U = \frac{\alpha}{r}$, де $\alpha < 0$, то це звичайний «притягуючий» потенціал, і розв'язок задачі є одна з кривих (еліпс, гіпербола чи парабола) відомий вам з лекцій. Якщо ж $\alpha > 0$, то це «відштовхуючий» потенціал.

Проінтегруємо (34).

Введемо позначення (для зручності):

$$\frac{L}{mr} = x \tag{35}$$

$$dx = -\frac{L}{mr^2}dr \tag{36}$$

Тоді (34) перепишеться у вигляді:

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - x^2 - \frac{2\alpha}{L}x}} + \mathrm{const}, \tag{37}$$

Згідно таблиці інтегралів від ірраціональних функцій:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + \mathrm{const} \qquad (\ a < 0,\ 4ac - b^2 < 0) \tag{38}$$

Інтеграл має розв'язок:

$$\varphi = -\arcsin\frac{-2x - \frac{2\alpha}{L}}{\sqrt{\frac{4\alpha^2}{L^2} + \frac{8E}{m}}} + \text{const} \tag{39}$$

Спростимо:

$$\varphi = \arcsin\frac{\frac{2L}{mr} + \frac{\alpha}{L}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{L^2} + \frac{2E}{m}}} + \text{const} \tag{40}$$

При $r = r_{\min}$ (в перицентрі) кут φ покладемо рівним нулю.

Поки що ніде не враховувався знак α.

Введемо позначення:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\frac{L^2}{\alpha^2}}, \tag{41}$$

а

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}. \tag{42}$$

Отже,

$$\frac{p}{r} = \pm 1 + e\cos\varphi \tag{43}$$

Є рівняння кривих другого порядку в полярних координатах.

§ 2. Основні формули задачі двох тіл для фінітного руху

Закон збереження енергії	$\frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{E}{\mu}$	(I)
Закон збереження моменту імпульсу	$\mu r^2\dot{\varphi} = L$	(II)
Комбінація законів збереження	$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{E}{\mu} - \left(\frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)$	(III)
Точки повороту еліпсу	$r_{\max,\min} = -\frac{\alpha\mu}{2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu^3\alpha^2}}\right)$	(IV)
Параметри еліпсу	$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2},$	(V)
	$b = \sqrt{r_{\max}r_{\min}}.$	(VI)
Зв'язок енергії та параметрів еліпса	$\frac{E}{\mu} = -\frac{\alpha}{2a}$	(VII)
Зв'язок моменту імпульсу та параметрів еліпса	$\frac{L}{\mu} = b\sqrt{\frac{\alpha}{a}}$	(VIII)
Період обертаня приведеної маси	$T = \frac{2\pi ab}{L/\mu}$	(IX)
III Закон Кеплера	$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\alpha}$	(X)

До цих рівнянь слід додати:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\alpha = \frac{G m_1 m_2}{\mu} = G(m_1 + m_2)$$

Всі формули цього розділу можна переписати для задачі Кеплера (див. 1.6), якщо врахувати, що в цьому випадку

$$\mu = m,$$
$$\alpha = GM,$$

де M – маса силового центру (наприклад Сонця, в сонячній системі).

§ 3. Розв'язки вибраних задач

Задача: Кравцов №7.8

Планета масою m рухається по еліпсу навколо Сонця таким чином, що найменша і найбільша відстані її від Сонця дорівнюють r_2 та r_1 відповідно. Знайти момент імпульсу L цієї планети відносно центру Сонця.

Розв'язок: Розв'язком даної задачі буде формула (VIII), та (V) і (VI).

Задача: Кравцов №7.13

Мінімальна відстань між компонентами подвійної зірки, що обертаються одна навколо другої, дорівнює r_1. Відносна швидкість їх в цьому положенні дорівнює v_1. Сума мас обох компонентів дорівнює M Знайти відстань r_2 між компонентами та їх відносну швидкість v_2 при максимальному віддаленні їх один від одного.

Розв'язок: Використаємо формулу (VIII) та (V) і (VI), з яких випливає:

$$\frac{L}{\mu} = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)r_1r_2}{r_1+r_2}} \tag{1}$$

Також згадаємо що

$$\frac{L}{\mu} = v_1r_1 \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), знайдемо r_2. Швидкість планети знайдемо з закону збереження імпульсу:

$$v_1r_1 = v_2r_2 \tag{3}$$

Задача: Іродов №1.248

Космічне тіло рухається до Сонця , маючи далеко від нього швидкість v_0 і прицільний параметр l – плече вектора v_0 відносно центру Сонця (рис. 1.48). Знайти найменшу відстань, на яке це тіло наблизиться до Сонця.

Розв'язок:

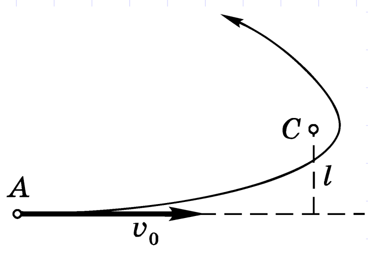


Рис. 1.48

Використаємо (III) записавши його для найближчої відстані ($\dot{r}=0$), та врахуємо що $\mu \approx m$. Крім того, позначимо масу сонця M.

$$\frac{E}{m} = \frac{L^2}{2m^2 r_1^2} - \frac{GM}{r_1} \tag{1}$$

Оскільки $E = \frac{mv_0^2}{2}$, а $L = mv_0 l$, то формула (1) дає:

$$v_0^2 = \frac{v_0^2 l^2}{r_1^2} - \frac{2GM}{r_1} \tag{2}$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо r_1, відкинувши негативний корінь рівняння, як фізично беззмістовний.

Задача: БКФ №9.7

Орбітальний рух подвійних зірок. Найбільш масивна зірка, відома в даний час – це зірка Дж.С. Пласкета. Вона є подвійною зіркою, тобто складається з двох зірок, пов'язаних між собою силою тяжіння. З спектральних досліджень відомо:

а) Період обертання цих зірок навколо їх центру мас дорівнює 14.4 доби ($1.2 \cdot 10^6$ с).

б) Швидкість руху кожної з компонент близько 220 км/с. Оскільки швидкості обох компонент майже рівні за величиною (але протилежні за напрямком), можна припустити, що вони розташовані на однакових відстанях від центру мас і, отже, їх маси майже однакові.

За цими даними розрахуйте приведену масу μ і відстань між двома компонентами R.

Розв'язок: Приведена маса $\mu \approx \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$.

Розглянемо уважно рис. 2. З цього рисунка видно, що відстань між компонентами R дорівнює радіусу траєкторії приведеної маси.

Радіус кругової траєкторії приведеної маси можна знайти з простої формули:

$$R = \frac{vT}{2\pi} = \frac{v_1 T}{\pi} \tag{1}$$

де v – це швидкість руху приведеної маси, яка дорівнює $v = 2v_1 = 2v_2$.

Масу можна знайти з закону Ньютона для руху приведеної маси:

$$\mu \frac{v^2}{R} = G\frac{m^2}{R^2},$$

$$\frac{m}{2}\frac{4v_1^2}{R} = G\frac{m^2}{R^2},$$

$$2v_1^2 = G\frac{m}{R},$$

$$\frac{m}{2} = \frac{v_1^2 R}{G},$$

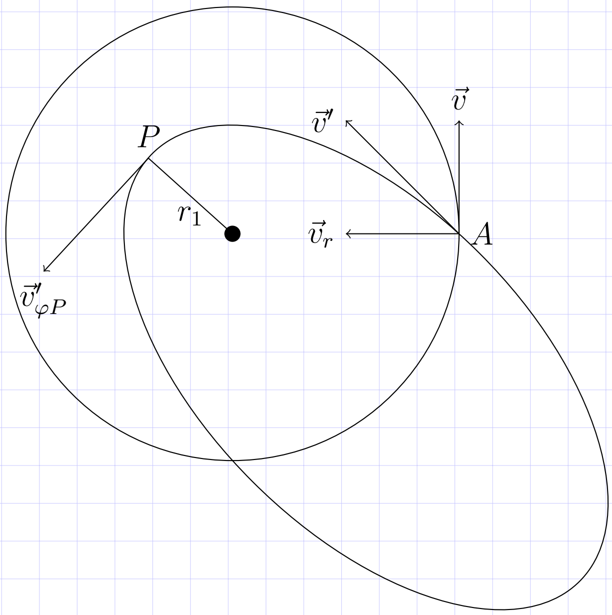
звідки з (1), остаточно

$$\mu = \frac{v_1^3 T}{\pi G},$$

Задача: ФТІ №9.23

Штучний супутник рухається по коловоï орбіті радіусом r навколо Землі. Яку радіальну швидкість треба йому надати, щоб його орбіта стала еліптичною з перигелієм r_1?

Розв'язок:



При радіальному поштовху, момент імпульсу тіла не зміниться, тобто:

$$L = mvR = mv_{\varphi P}r_1, \tag{1}$$

Після поштовху, енергія у супутника змінилась, але далі вона буде константою. Запишемо енергію для точки A енергію, і для точки P і прирівняємо їх:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv_r^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{mv'^2_{\varphi P}}{2} - G\frac{Mm}{r_1}, \tag{2}$$

Саму швидкість v – яка була в супутник до поштовху, може бути знайдена з закону руху:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}. \tag{3}$$

Цих рівнянь достатньо, щоб розв'язати поставлену задачу.

$$v_r = \sqrt{G\frac{M}{R}}\left(\frac{R}{r_1} - 1\right) \tag{4}$$

Задача: ФТІ №9.13

При русі в центральному полі швидкість частки масою m змінюється згідно із законом $v = \alpha r^{-\frac{1}{2}}$. Встановить залежність сили від відстані до центру поля r. Знайдіть рівняння траєкторії частки у разі, коли її максимальне наближення до центру до центру поля має величину r_0.

Розв'язок: Знайдемо силу, що діє на частинку:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}, \tag{1}$$

$$U(r) = E - \frac{mv^2}{2} = E - \frac{m\alpha^2}{2r} \tag{2}$$

Оскільки $E = const$, то

$$F = -\frac{m\alpha^2}{r^2} \tag{3}$$

Знайдемо траєкторію руху частинки з рівняння (34, 1.6).
Для нашого випадку:

$$E - U(r) = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\alpha^2}{2r}, \tag{4}$$

$$L = mv(r_0)r_0 = m\alpha\sqrt{r_0}. \tag{5}$$

Підставимо (36, 1.6), (4) та (5) в рівняння (34, 1.6):

$$\varphi - \varphi_0 = -\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{r_0}}x - x^2}}, \tag{6}$$

де φ_0 – константа інтегрування.
Співставляючи табличний інтеграл (38, 6) ($b = \frac{\alpha}{\sqrt{r_0}}, x = \frac{\alpha\sqrt{r_0}}{r}, a = -1, c = 0$):

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{b - 2x}{b} = 1 - \frac{2x}{b} = 1 - \frac{2r_0}{r}. \tag{7}$$

Врахуємо, що при $r = 0$, $\varphi = 0$, з останнього рівняння отримаємо $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, остаточно:

$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos\varphi} \tag{8}$$

Література

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. — 5-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — Т. Том I. Механика. — 220 с. — ISBN: 5922100556.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. — изд. 4-е, стереотипное изд. — М. : Физматлит, 2005. — Т. Том 1. Механика. — 559 с.